Significativité statistique et qualité d'ajustement

Gilbert Ritschard

Département d'économétrie, Université de Genève

http://mephisto.unige.ch

Vidéo-conf avec Bamako, 19 novembre 2003

Significativité statistique et qualité d'ajustement

Gilbert Ritschard
Département d'économétrie, Université de Genève
gilbert.ritschard@themes.unige.ch

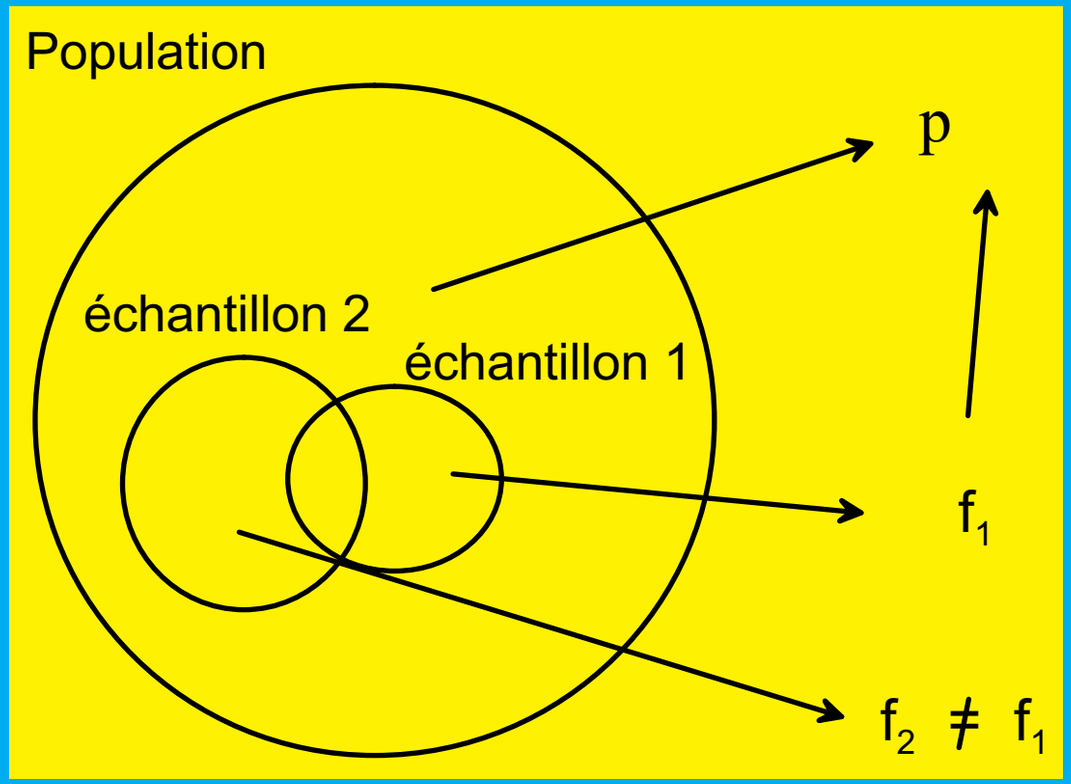
Plan

http://mephisto.unige.ch

1 Objectifs

1. Comprendre
   - l'aléa d'échantillonnage
   - la variabilité des estimations d'un échantillon à l'autre (erreur standard)
2. Se familiariser avec la notion de degré de signification
3. Initiation à la modélisation
   - régression linéaire
   - régression logistique
   - ...
4. Savoir juger de la qualité d'ajustement
   - Distance par rapport à la cible
   - Gain par rapport à un modèle de référence (indépendance)

2 Aléa d'échantillonnage



Exemple : estimation de la proportion de filles

Soit une population avec $p = 56\%$ de filles.

On a tiré au hasard 5 échantillons de taille 5

	échantillon				
i	1	2	3	4	5
1	H	F	F	H	F
2	H	H	F	F	F
3	F	F	F	H	H
4	F	F	F	H	H
5	F	F	H	H	H
$\hat{p}$	60%	80%	80%	20%	40%

Ici, les estimations varient beaucoup d'un échantillon à l'autre

Plus l'échantillon est grand, moins les estimations varient.

3 Erreur standard

La variabilité des estimations est évaluée par l'erreur standard

Voici un extrait d'output obtenu avec

```
DESCRIPTIVES
    VARIABLES=agegros1
    /STATISTICS=MEAN SEMEAN .
```

Descriptive Statistics

	N	Mean	
	Statistic	Statistic	Std. Error
AGEGROS1 âge à la première grossesse	458	18.48	.18
Valid N (listwise)	458		

Ici, l'erreur standard de .18 indique une faible variabilité de la moyenne

$\Rightarrow$ bonne confiance dans la moyenne trouvée de 18.48

Exemple de régression

```
REGRESSION
     /STATISTICS COEFF R ANOVA
     /DEPENDENT nbgross
     /METHOD=ENTER age agerapse amour rage2 .
```

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-.208	.241		-.864	.388
	AGE âge (années)	.079	.009	.296	8.331	.000
	AGERAPSE Age au premier rapport sexuel	-.093	.013	-.256	-7.251	.000
	AMOUR Etes-vs déjà tombé amoureux (se)?	.617	.076	.248	8.090	.000
	RAGE2 nombre de jeunes de 20-30 ans dans la concession	-.006	.012	-.014	-.452	.652

a. Dependent Variable: NBGROSS Nombre de grossesse

$$\text{nbgross} = -.208 + .079\,\text{age} - .093\,\text{agerapse} + .617\,\text{amour} - .006\,\text{rage2}$$

4 Degré de signification

La statistique calculée (estimation, distance, ...) est-elle suffisamment éloignée de 0 ?

Degré de signification : probabilité d'obtenir une valeur plus éloignée de 0 pour un échantillon (en admettant qu'elle soit nulle dans la population.)

Exemple (cf régression) :

$$\begin{aligned} p(|\hat{\beta}_{\text{age}}| > .079) &= 0\% \\ p(|\hat{\beta}_{\text{agerapse}}| > .093) &= 0\% \\ p(|\hat{\beta}_{\text{amour}}| > .617) &= 0\% \\ p(|\hat{\beta}_{\text{rage2}}| > .006) &= 65\% \end{aligned}$$

Le coefficient de `rage2` n'est pas statistiquement significatif : il y a 65% de chances d'obtenir .006 ou plus pour l'échantillon quand l'effet est nul dans la population.

Degré de signification (p-valeur, p-value, sig., prob., ...)

Probabilité que la «distance» entre

- ce que l'on observe (échantillon)
  - valeur du coefficient de `rage2` ; nbre de grossesses ; ...
- et ce que l'on attend sous l'hypothèse H_0 :
  - coefficient de `rage2` nul ; nbre de grossesses indépendant de `age`, `agerapse`, `amour`, `rage2` ; nbre de grossesses régi par le modèle postulé ; ...

soit due au hasard de l'échantillonnage.

Utilisation

degré de signification $<$ 5% (ou 10%) $\Rightarrow$ rejet de l'hypothèse

$\geq$ 5% (ou 10%) $\Rightarrow$ hypothèse raisonnable

5 Modélisation

Description mathématique permettant de prédire les valeurs prises par une grandeur :

Exemples (avec variable réponse quantitative) :

Moyenne indépendante de facteurs explicatifs l'âge à la première grossesses (*agegros1*) distribuée selon une loi normale $N(\mu = 18, \sigma = 3)$

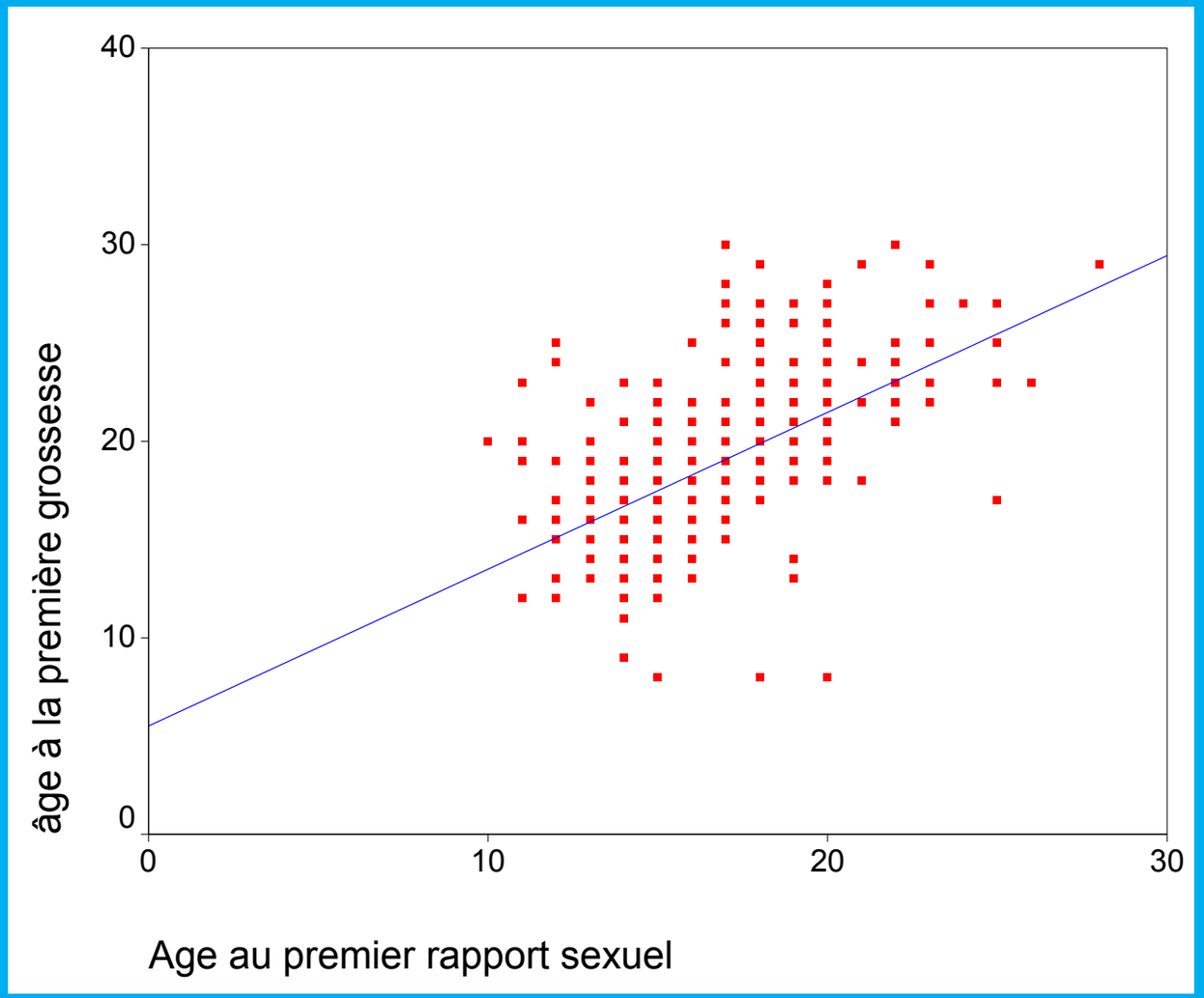
$$\boxed{\text{agegros1} = 18 + \varepsilon} \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon = 3)$$

On prédit en moyenne 18 ans (l'écart type des observations autours de 18 étant de 3 ans)

Régression la valeur attendue de *agegros1* dépend linéairement de l'âge au premier rapport sexuel

$$\boxed{\text{agegros1} = 5.5 + 0.8\,\text{agerapse} + \varepsilon} \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$$

Régression : agegros1 $= 5.5 + 0.8\,$agerapse $+ \varepsilon$



Pour agerapse $= 14$, la prédiction est : agegros1 $= 5.5 + .8 \cdot 14 = \boxed{16.7}$ ans

Régression logistique

Variable réponse dichotomique :
«A eu rapport sexuel avant 16 ans» (oui = 1, non = 0)

p probabilité du oui

Régression logistique postule que $\boxed{\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)}$ dépend linéairement de facteurs explicatifs (genre, quartier, nbre de jeunes dans concession)

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	SEXE(1)	-.345	.119	8.453	1	.004	.708
	QUARTIER			2.850	2	.241	
	QUARTIER(1)	.061	.195	.100	1	.752	1.063
	QUARTIER(2)	-.170	.159	1.150	1	.284	.844
	RAGE2	.036	.022	2.680	1	.102	1.037
	Constant	-1.225	.163	56.429	1	.000	.294

a. Variable(s) entered on step 1: SEXE, QUARTIER, RAGE2.

$$\text{logit}(p) = -1.225 - .345\,\text{homme} + .061\,\text{Niarela} - .17\,\text{Sicorini} + .36\,\text{rage2}$$

Régression logistique (suite)

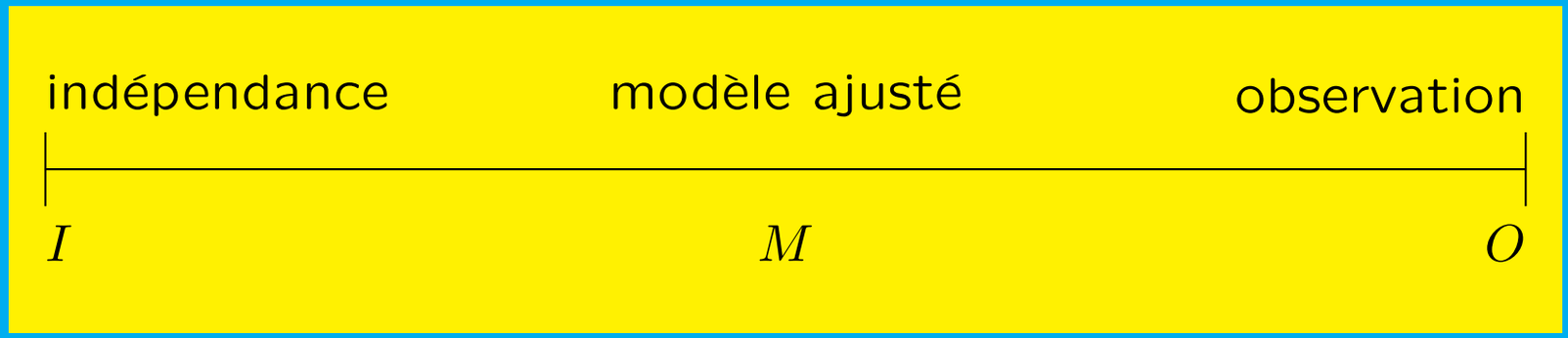
$$\text{logit}(p) = -1.225 - .345\,\text{homme} + .061\,\text{Niarela} - .17\,\text{Sicorini} + .36\,\text{rage2}$$

Exemple : Homme, Badangiara Coura, 2 jeunes dans concession $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{logit}(p) &= -1.225 - .345 \cdot 1 + .061 \cdot 0 - .17 \cdot 0 + .36 \cdot 2 = -.85 \\ p &= \frac{1}{1 + \exp\big(-\text{logit}(p)\big)} \\ &= \frac{1}{1+\exp(.85)} = \frac{1}{1+2.34} = .29 = \boxed{29\%} \end{aligned}$$

Pour une fille, $\text{logit}(p) = -1.225 + .72 = -0.505 \Rightarrow p = \frac{1}{1+\exp(.505)} = 38\%$

6 Qualité d'ajustement



En notant : modèle ajusté M, sans prédicteurs I, observations O
on distingue deux types d'indicateurs :

1. divergence par rapport aux données $D(M, O)$
2. gain par rapport au modèle sans prédicteurs $D(I, M) = D(I, O) - D(M, O)$

Mesure de la divergence

optique moindres carrés : $D(M, O) =$ somme de carrés d'écarts

optique maximum de vraisemblance : $D(M, O) = -2\text{LogLik}$

Qualité d'ajustement en régression

$D(M, O)$ est mesuré par l'erreur standard de régression

$D(I, M)$ est évalué par le R^2 qui mesure en fait $\dfrac{D(I,O) - D(M,O)}{D(I,O)}$

Régression pour le nombre de grossesses

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.363[a]	.132	.128	.974

a. Predictors: (Constant), RAGE2 nombre de jeunes de 20-30 ans dans la concession, AMOUR Etes-vs déjà tombé amoureux (se)?, AGERAPSE Age au premier rapport sexuel, AGE âge (années)

Statistiques du khi-2

Pour autres types de modélisation (régression logistique, modèles de Cox, ...), distance aux observations mesurée par le -2LogLik (-2LL$= -2$ fois logarithme de la vraisemblance)

$$-2LL(I) - [-2LL(M)] \sim \chi^2_d \quad \text{loi du khi-carré}$$

avec d degrés de liberté, $d =$ différence du nombre de paramètres

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	13.217	4	.010
	Block	13.217	4	.010
	Model	13.217	4	.010

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	1816.085	.007	.011

Statistiques du khi-2 (suite)

Selon les contextes, on utilise parfois d'autres statistiques du khi-2 (Pearson, Score, ...)

Le principe est toujours le même :

Distance par rapport à une hypothèse

- indépendance (modèle sans facteurs explicatifs)
- égalité de distributions
- égalité de courbe de survie (cf. Kaplan-Meier)
- ...

Pour juger d'une statistique du khi-2, il faut savoir quelle est l'hypothèse testée !

Exemple : Statistique de Hosmer-Lemeshow (mesure $D(M, O)$)

Hypothèse : le modèle de régression logistique est correct pour les données ($D(M, O)$ petit).

Hosmer and Lemeshow Test

Step	Chi-square	df	Sig.
1	7.434	8	.491

Ici, comme le degré de signification est $> .05$, la distance est petite, ce qui indique un bon ajustement aux données.

Exemple : Tableau croisé : hypothèse d'indépendance

RAPOCANB fréquence des rapports sexuels occasionnels * SANTEGO auto-évaluation état santé Crosstabulation

Count

		SANTEGO auto-évaluation état santé				
		1 Très bonne	2 bonne	3 moyenne	4 mauvaise	Total
RAPOCANB fréquence des rapports sexuels occasionnels	1 une fois	18	3	6	2	29
	2 plusieurs fois	117	76	36	3	232
	3 souvent	58	36	17	3	114
	4 pas de rapport sexuel occasionnel	33	1	5	0	39
	5 non qu'avec partenaire durable	341	169	148	12	670
	6 non jamais de rapports sexuels	352	148	92	10	602
Total		919	433	304	30	1686

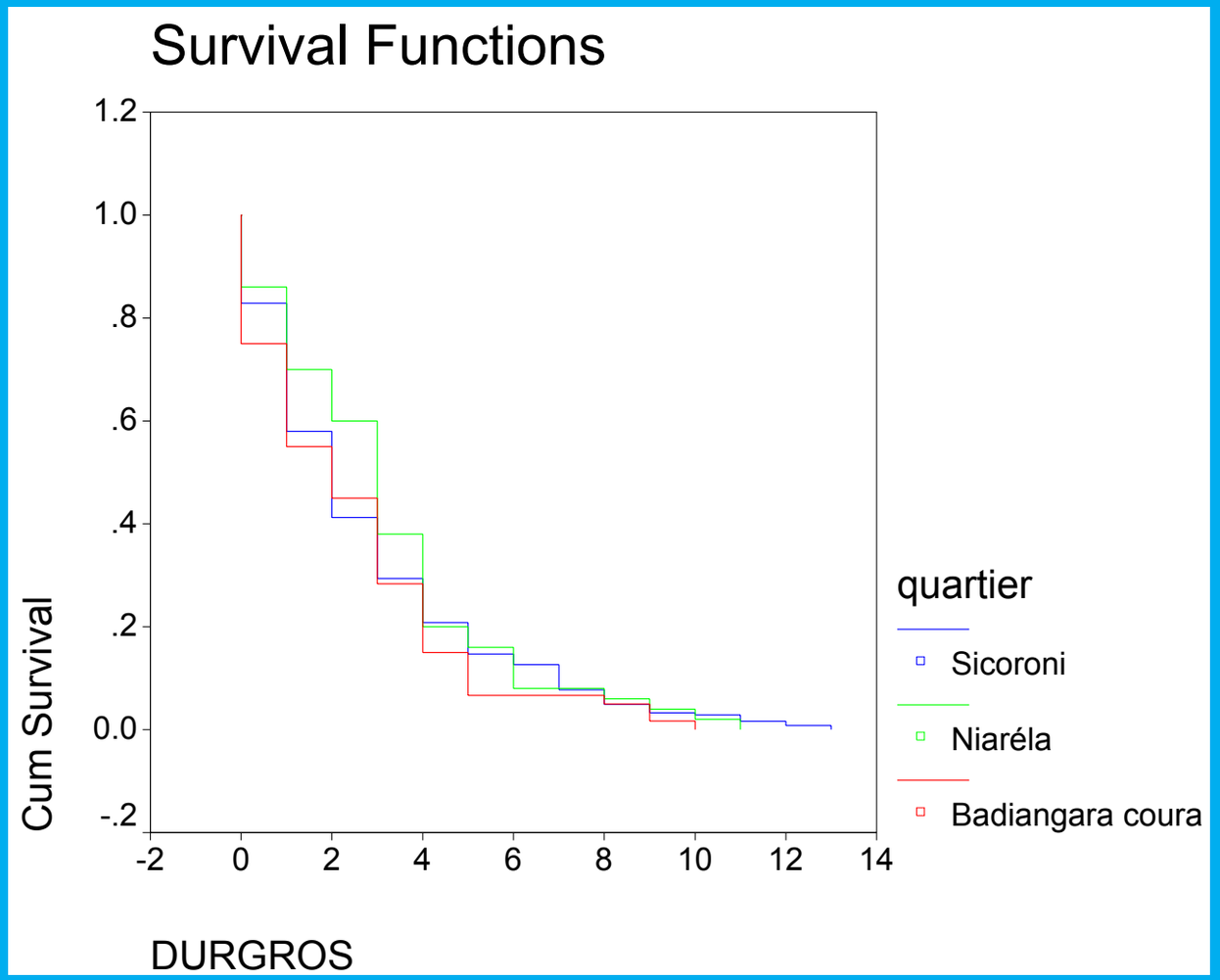
Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	44.844[a]	15	.000
Likelihood Ratio	48.247	15	.000
Linear-by-Linear Association	.730	1	.393
N of Valid Cases	1686		

a. 4 cells (16.7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is .52.

Exemple : KM : hypothèse d'égalité de courbes de survie

Durée (durgros) entre premier rapport sexuel et 1ère grossesse selon quartier



Et voici les statistiques de test fournies par la procédure KM :

Test Statistics for Equality of Survival Distributions for QUARTIER

	Statistic	df	Significance
Log Rank	1.73	2	.4208
Breslow	3.04	2	.2192
Tarone-Ware	2.49	2	.2873

7 Conclusion

Evaluation d'un modèle :

1. Ajustement global : khi-2, R^2, etc.

   Principe de parcimonie : retenir le modèle le plus simple qui donne un ajustement satisfaisant

   Avec trop de paramètres, le modèle «colle» trop à l'échantillon, et manque de robustesse.

   Retenir modèle avec plus petit AIC ou BIC.

2. Significativité individuelle des effets

3. L'examen des résidus (écarts prédiction-observation) peut fournir des informations utiles.